

# Esercizi Microeconomia prima parte

Giancarlo Gozzi  
Dipartimento di Scienze Economiche  
Università di Bologna

marzo 2018

## 1 Equilibrio di mercato e statica comparata

**Esercizio 1.** Si consideri un mercato competitivo in cui  $Q^d = 4000 - 20p$  è la curva di domanda che descrive il comportamento dei compratori e  $Q^s = 30p$  la curva di offerta che rappresenta il comportamento degli offerenti.

- (i) Si determini per quale prezzo il mercato è nella configurazione di equilibrio.
- (ii) Si calcoli l'elasticità della domanda in corrispondenza della configurazione di equilibrio e se ne dia l'interpretazione economica.
- (iii) Supponiamo che il Governo decida di sostenere l'offerta aggiungendo la sua domanda a quella dei privati; sia  $Q^G = 1000$  la domanda del Governo:
  - (a) si determini il nuovo prezzo di equilibrio della merce;
  - (b) si calcoli il costo dell'operazione per il Governo.

**Soluzione.** (i) La configurazione di equilibrio del mercato è definita dal seguente sistema di equazioni:

$$Q^d = 4.000 - 20p \quad (1)$$

$$Q^s = 30p \quad (2)$$

$$Q^d = Q^s \quad (3)$$

ovvero:

$$Q = 4.000 - 20p \quad (4)$$

$$Q = 30p \quad (5)$$

in cui abbiamo indicato con  $Q$  la quantità della merce *scambiata* in equilibrio, e con  $p$  il prezzo unitario. Si ricava  $p^* = 80$  e  $Q = 2.400$ ; il prezzo che rende compatibili le decisioni di domanda ed offerta è, quindi,  $p^* = 80$ .

(ii) L'elasticità della domanda in corrispondenza della configurazione di equilibrio è definita da:

$$\varepsilon^d = \frac{\Delta Q^d}{\Delta p} \cdot \frac{p^*}{Q} = -20 \cdot \frac{80}{2.400} = -\frac{2}{3}$$

L'elasticità della domanda misura la reattività dei compratori alle variazioni del prezzo.

(iii) La decisione del Governo di sostenere l'offerta acquistando  $Q^G = 1.000$  unità di merce ha conseguenze sulla configurazione di equilibrio del mercato, che ora risulta determinata dal sistema di equazioni:

$$Q = 4.000 - 20p + 1.000$$

$$Q = 30p$$

vale a dire:

$$Q = 5.000 - 20p \quad (6)$$

$$Q = 30p \quad (7)$$

da cui si ricava che  $\bar{p} = 100$  e  $Q = 3.000$ . Pertanto:

- (a) il sostegno del Governo porta ad un aumento del prezzo unitario della merce da 80 a 100 euro;
- (b) il costo dell'operazione per il Governo è pari a  $G = 100 \cdot 1.000 = 100.000$  euro.

**Esercizio 2.** Si consideri un mercato concorrenziale in cui il comportamento dei consumatori è descritto dalla curva di domanda  $Q^d = 2000 - 20p$ , mentre il comportamento dei produttori è definito dalla curva di offerta seguente:

$$Q^s = \begin{cases} 0 & 0 \leq p < 20 \\ (0, 1500] & p = 20 \\ 1500 & p > 20 \end{cases}$$

- a) Si determini l'elasticità dell'offerta rispetto al prezzo.
- b) Si determini la configurazione di equilibrio del mercato.

**Soluzione.** a) Dalla figura 1 si ricava immediatamente che l'elasticità della offerta rispetto al prezzo è pari a 0 per  $p \neq 20$  mentre è pari a  $+\infty$  per  $p = 20$ .

b) Sono possibili due configurazioni di equilibrio economicamente significative (non consideriamo la situazione in cui  $Q^* = 0$ ). La prima è quella in cui l'equilibrio corrisponde al tratto infinitamente elastico della curva di offerta:

$$\begin{aligned} Q^d &= 2000 - 20p \\ p &= 20 \\ Q^d &= Q \end{aligned}$$

Dalla soluzione del sistema di equazioni precedente si ricava che  $p^* = 20$  e  $Q^* = 1600$ ; ma  $Q \leq 1500$  e quindi la soluzione non può essere accettata. L'altra possibilità è quella rappresentata dalla soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} Q^d &= 2000 - 20p \\ Q^s &= 1500 \\ Q^d &= Q^s \end{aligned}$$

da cui si ricava  $p^* = 25$ . Si veda la figura 2.

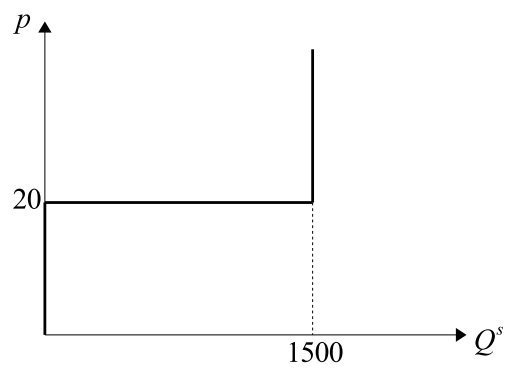


Figura 1: curva di offerta

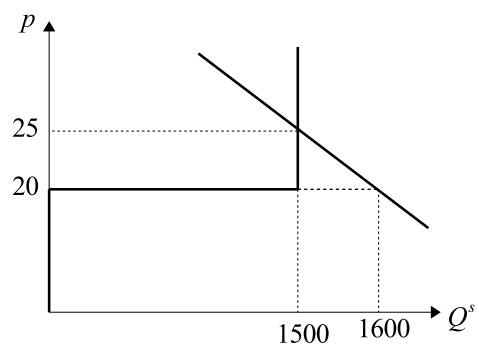


Figura 2: equilibrio di mercato

## 2 Scelta razionale del consumatore

**Esercizio 3.** Tizio dispone di 3.000 euro da spendere, in un mese, per l'acquisto di due beni; si indichi con  $q_1$  la quantità del bene 1 e con  $q_2$  quella del bene 2. Il prezzo di mercato dei due beni è, rispettivamente, di 10 euro per il bene 1 e 20 euro per il bene 2; quindi  $p_1 = 10$  e  $p_2 = 20$ . Le preferenze di Tizio comportano un saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) pari a  $\sigma - dq_2/dq_1 = q_2/(4 \cdot q_1)$ .

- (i) Si dia l'interpretazione economica del saggio marginale di sostituzione per il paniere di consumo in cui  $q_1 = 100$  e  $q_2 = 100$ .
- (ii) Si determini la scelta razionale di Tizio.
- (iii) Supponiamo che il prezzo di mercato del bene 2 diminuisca del 50%; si determini l'effetto di tale diminuzione sulla quantità domandata del bene 2 e la si scomponga in effetto sostituzione ed effetto reddito.

**Soluzione.** (i) Il saggio (marginale) di sostituzione calcolato per il paniere  $(q_1, q_2) = (100, 100)$  è pari a:

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{100}{4 \cdot 100} = \frac{1}{4}$$

Tizio è pertanto disposto a scambiare 4 unità del bene 1 con un'unità del bene 2, sulla base della sua struttura di preferenze.

(ii) La scelta razionale di Tizio è rappresentata dal paniere  $(q_1^*, q_2^*)$  che soddisfa il vincolo di bilancio, cioè comporta una spesa non superiore al reddito a disposizione di Tizio, e rispetto alla quale non esistono panieri preferiti, sulla base delle preferenze di Tizio; la scelta razionale soddisfa le seguenti condizioni:

$$\frac{q_2}{4q_1} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

e

$$10q_1 + 20q_2 = 3.000 \tag{9}$$

La soluzione è  $q_1^* = 60$  e  $q_2^* = 120$ .

(iii) Il prezzo di mercato del bene 2 è ora  $p'_2 = 20 - 0,5 \cdot 20 = 10$ . La scelta razionale risulta ora data dal paniere  $(q_1^{**}, q_2^{**})$  che soddisfa il sistema di equazioni:

$$\frac{q_2}{4q_1} = 1 \tag{10}$$

$$10q_1 + 10q_2 = 3.000 \tag{11}$$

vale a dire  $q_1^{**} = 60$  e  $q_2^{**} = 240$ . La diminuzione del prezzo del bene 2 porta Tizio ad aumentare di 120 unità la quantità domandata (*effetto prezzo*).

Per scomporre l'effetto prezzo in effetto sostituzione ed effetto reddito dobbiamo individuare quale sarebbe la scelta razionale di Tizio nella ipotetica situazione in cui il prezzo del bene 2 è diminuito ed il reddito di Tizio è stato aggiustato in modo da mantenere invariato il suo potere d'acquisto in termini reali rispetto alla situazione iniziale. Si ricava che con un reddito pari a:

$$R' = 10 \cdot 60 + 10 \cdot 120 = 1.800$$

Tizio è in grado di acquistare il paniere iniziale  $(x_1^*, x_2^*) = (60, 120)$ ; pertanto il sistema di equazioni:

$$\frac{q_2}{4q_1} = 1 \quad (12)$$

$$10q_1 + 10q_2 = 1.800 \quad (13)$$

determina la scelta razionale di Tizio corrispondente alla situazione in cui, ai nuovi prezzi, il potere d'acquisto in termini reali di Tizio è invariato rispetto alla situazione iniziale; si ricava  $\bar{q}_1 = 36$  e  $\bar{q}_2 = 144$ .

L'effetto sostituzione è pari a  $\bar{q}_2 - q_2^* = 144 - 120 = 24$ , mentre l'effetto reddito è pari a  $q_2^{**} - \bar{q}_2 = 240 - 144 = 96$ .

**Esercizio 4.** Si consideri un consumatore le cui preferenze sono rappresentate numericamente dalla funzione (ordinale) di utilità  $u = q_1^{2/3} \cdot q_2^{1/3}$  in cui  $q = (q_1, q_2)$  indica il generico paniere a disposizione del consumatore, con  $q_1$  quantità del bene 1 e  $q_2$  quella del bene 2; il corrispondente saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) è  $\sigma = -\frac{dq_2}{dq_1} = 2q_2/q_1$ . Supponiamo che  $p_1 = 10$  sia il prezzo (unitario) di mercato del bene 1 e  $p_2 = 5$  quello del bene 2. Il consumatore può spendere  $M = 150$  euro per l'acquisto dei due beni.

i) Si calcoli il saggio marginale di sostituzione corrispondente al paniere  $q = (q_1, q_2) = (5, 20)$  e se ne fornisca l'interpretazione economica.

ii) Si determini la scelta razionale del consumatore.

iii) Si ricavi la curva reddito-consumo per il consumatore.

iv) Si ricavi la curva prezzo-consumo quando  $p_2 = 5$  ed  $M = 150$ .

**Soluzione.** i) Il saggio marginale di sostituzione corrispondente al paniere  $q = (5, 20)$  è pari a:

$$\sigma(5, 20) = \frac{2 \cdot 20}{5} = 8 \quad (14)$$

Il paniere  $q = (5, 20)$  è un paniere accessibile; si ricava infatti che  $10 \cdot 5 + 5 \cdot 20 = 150 = 10q_1 + 5q_2$ , cioè rispetta il vincolo di bilancio.

In base alle sue preferenze il consumatore è disposto a rinunciare a 8 unità del bene 2 per consumare una unità in più del bene 1 quando dispone di 5 unità del bene 1. Al paniere in questione possiamo quindi associare due prezzi relativi (o ragioni di scambio):

- quello fatto dal mercato è  $p = p_1/p_2 = 2$  ed esprime il costo opportunità, per il consumatore, del bene 1 (misurato in termini del bene 2);
- quello relativo alle preferenze del consumatore è  $\sigma(5, 20) = 8$  ed esprime il beneficio che il consumatore attribuisce al consumo di una unità addizionale del bene 1 (sempre misurato in termini del bene 2).

ii) La scelta razionale del consumatore deve rispettare due condizioni:

(1) il paniere scelto deve rispettare il vincolo di bilancio:

$$10q_1 + 5q_2 = 150 \quad (15)$$

(2) il paniere scelto deve bilanciare benefici e costi (al margine) della scelta, vale a dire:

$$\frac{2q_2}{q_1} = 2 \quad (16)$$

La scelta razionale si ottiene, pertanto, dalla soluzione del sistema formato dalle equazioni (15) e (16):

$$\begin{aligned} \frac{2q_2}{q_1} &= 2 \\ 10q_1 + 5q_2 &= 150 \end{aligned}$$

Dalla soluzione del sistema si ricava  $q_1^* = 10$  e  $q_2^* = 10$ .

iii) La curva consumo-reddito è definita da tutti i panieri  $q = (q_1, q_2)$  che corrispondono a scelte razionali del consumatore al variare (in modo parametrico) del suo reddito monetario. Per ottenere la curva consumo-reddito dobbiamo anzitutto determinare la scelta razionale del consumatore per ogni possibile livello di reddito *dati* i prezzi di mercato dei beni. Quindi:

$$\frac{2q_2}{q_1} = 2 \quad (17)$$

$$10q_1 + 5q_2 = M \quad (18)$$

dove ora il livello di reddito viene lasciato indeterminato (E' sempre una variabile esogena del modello di scelta del consumatore, ma non viene specificata numericamente). Dalla soluzione del sistema (17) - (18) si ricava:

$$q_1^E = \frac{M}{15}, q_2^E = \frac{M}{15} \quad (19)$$

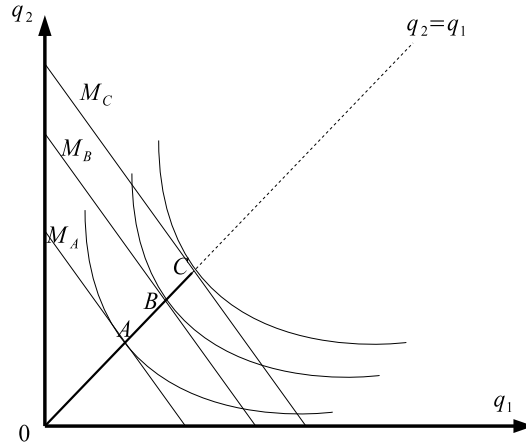


Figura 3: Curva reddito-consumo per  $M \in [0, M_C]$

Le (19) sono le curve engeliane di domanda per i due beni, vale a dire le quantità acquistate dei due beni in base al reddito a disposizione del consumatore, e dati i prezzi di mercato dei beni, che corrispondono a scelte razionali. Possiamo eliminare  $M$  e ottenere:

$$q_2 = \frac{M}{15} = q_1$$

ovvero:

$$q_2 = q_1 \quad (20)$$

La curva consumo-reddito è quindi, geometricamente, un segmento della bisettrice del primo quadrante.

La figura 3 rappresenta la curva reddito consumo corrispondente a livelli di reddito  $0 \leq M \leq M_C$  e, come si può vedere, coincide con un tratto della bisettrice del primo quadrante. I panieri  $A$ ,  $B$ ,  $C$  corrispondono a scelte razionali del consumatore per livelli di reddito pari, rispettivamente, a  $M_A$ ,  $M_B$  e  $M_C$  dati i prezzi di mercato dei due beni. Movimenti lungo la curva, verso destra o sinistra, sono determinati da variazioni del reddito a parità di prezzi dei beni; cambiamenti del prezzo relativo dei beni determinano spostamenti della curva (verso l'alto se il prezzo relativo del bene 1 aumenta, verso il basso se diminuisce).

iv) La curva prezzo-consumo individua tutte le scelte razionali del consumatore al variare del prezzo di un determinato bene, fermi restando i prezzi degli altri beni ed il reddito del consumatore. Nel nostro caso si chiede di ricavare la curva prezzo-consumo quando cambia il prezzo del bene 1



fermi restando il prezzo del bene 2 ed il reddito del consumatore. La scelta razionale del consumatore, per ogni possibile livello di prezzo del bene 1 (considerato, quindi, come un parametro indeterminato) si ottiene dalla soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{2q_2}{q_1} &= \frac{p_1}{5} \\ p_1 q_1 + 5q_2 &= 150\end{aligned}$$

Dalla condizione di ottimo si ricava che:

$$q_2 = \frac{p_1}{10} \cdot q_1$$

Sostituendo tale risultato nella equazione del vincolo di bilancio si ricava:

$$q_1^M = \frac{100}{p_1}$$

e

$$q_2^M = 10$$

Il generico paniere ottimale, al variare del prezzo del bene 1 e fermi restando il prezzo del bene 2 ed il reddito del consumatore, è quindi:

$$q^M = (q_1^M, q_2^M) = \left( \frac{100}{p_1}, 10 \right) \quad (21)$$

La (21) definisce una retta, nel piano  $(q_1, q_2)$  parallela all'asse  $q_1$  e con ordinata costante e pari a  $q_2^M = 10$ .

La figura 4 rappresenta geometricamente la curva prezzo-consumo. Il movimento lungo la curva è determinato da cambiamenti nel prezzo del bene 1 a parità di prezzo del bene 2 e di reddito del consumatore. Cambiamenti del prezzo del bene 2 e/o del reddito del consumatore determinano spostamenti della curva (che rimane però sempre parallela all'asse  $q_1$ ).

**Esercizio 5.** Si consideri un consumatore le cui preferenze sono rappresentate numericamente dalla funzione (ordinale) di utilità  $u = q_1^{2/3} \cdot q_2^{1/3}$  in cui  $q = (q_1, q_2)$  indica il generico paniere a disposizione del consumatore, con  $q_1$  quantità del bene 1 e  $q_2$  quella del bene 2; il corrispondente saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) è  $\sigma = -\frac{dq_2}{dq_1} = 2q_2/q_1$ . Supponiamo che  $p_1 = 10$  sia il prezzo (unitario) di mercato del bene 1 e  $p_2 = 5$  quello del bene 2. Il consumatore può spendere  $M = 150$  euro per l'acquisto dei due beni.

Supponiamo che il prezzo del bene 1 aumenti del 20% fermi restando il prezzo dell'altro bene ed il reddito del consumatore. Si determini l'effetto dell'aumento di prezzo del bene 1 sulla scelta razionale del consumatore e si scomponga l'effetto prezzo relativo al bene 1 in effetto reddito ed effetto sostituzione.

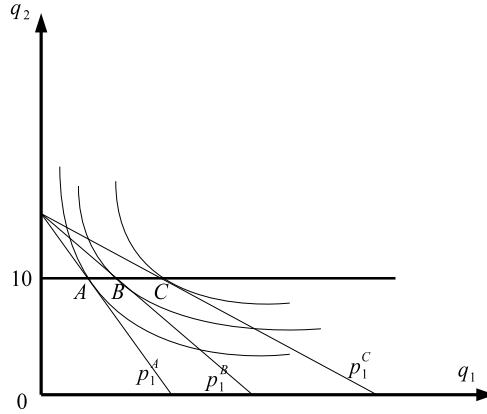


Figura 4: Curva prezzo-consumo quando  $p_2 = 5$  e  $M = 150$ .

**Soluzione.** Abbiamo visto, dall'esercizio precedente, che la scelta razionale del consumatore è rappresentata dal panier in cui  $q_1^* = 10$  e  $q_2^* = 10$ . L'aumento del prezzo unitario del bene 1 determina un aumento del costo del panier pari a  $\Delta M = (12 - 10) \cdot 10 = 20$  e quindi il consumatore è in grado di acquistare il panier corrispondente alla scelta iniziale se il suo reddito è pari a  $M' = M + \Delta M = 150 + 20 = 170$ . I vincoli di bilancio  $10q_1 + 5q_2 = 150$  e  $12q_1 + 5q_2 = 170$  sono equivalenti dal punto di vista del reddito reale perchè in entrambi i casi il consumatore può acquistare il panier  $q^* = (q_1^*, q_2^*) = (10, 10)$ .

L'aumento del prezzo del bene 1, a parità di tutto il resto, richiede, quindi, di considerare tre scelte, razionali, del consumatore:

- la scelta iniziale, cioè quando  $p_1 = 10$ ,  $p_2 = 5$  e  $M = 150$ ;
- la scelta quando  $p_1 = 12$ ,  $p_2 = 5$  e  $M = 150$ , cioè a seguito dell'aumento di prezzo del bene 1;
- la scelta nell'ipotetica situazione in cui a fronte dell'aumento di prezzo del bene 1 il reddito del consumatore aumenta in modo tale da mantenere invariato il suo reddito in termini reali, vale a dire  $p_1 = 12$ ,  $p_2 = 5$  e  $M = 170$ .

Con l'aumento di prezzo il consumatore si comporta in modo razionale scegliendo il panier che soddisfa il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{2q_2}{q_1} = \frac{12}{5} \quad (22)$$

$$12q_1 + 5q_2 = 150 \quad (23)$$

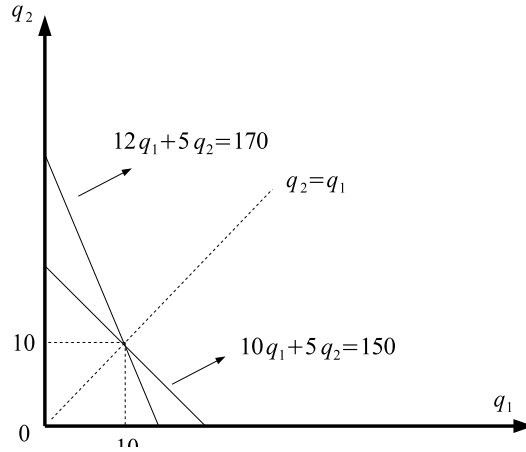


Figura 5: Vincoli di bilancio equivalenti: in entrambi i casi il consumatore può acquistare il paniere  $(q_1, q_2) = (10, 10)$

vale a dire  $q_1^{**} = 25/3$  e  $q_2^{**} = 10$ . L'aumento del prezzo del bene 1 porta il consumatore a ridurre la quantità acquistata del bene di  $5/3$  unità:

$$\Delta q_1 = q_1^{**} - q_1^* = \frac{25}{3} - 10 = -\frac{5}{3}$$

La quantità acquistata del bene 2 rimane, invece, invariata:  $q_2^{**} = q_2^* = 10$ . Se l'aumento di prezzo del bene 1 è accompagnato da un aumento di reddito monetario che mantiene invariato il reddito reale la scelta razionale del consumatore si ottiene dalla soluzione del sistema di equazioni:

$$\frac{2q_2}{q_1} = \frac{12}{5} \quad (24)$$

$$12q_1 + 5q_2 = 170 \quad (25)$$

cioè  $\hat{q}_1 = 85/9$  e  $\hat{q}_2 = 34/3$ .

Possiamo allora scrivere la seguente relazione:

$$\Delta q_1 = q_1^{**} - q_1^* = \underbrace{\hat{q}_1 - q_1^*}_{\Delta q_1^s} + \underbrace{q_1^{**} - \hat{q}_1}_{\Delta q_1^r} \quad (26)$$

Quindi  $\Delta q_1 = 25/3 - 10 = -5/3$  è l'effetto prezzo,  $\Delta q_1^s = 85/9 - 10 = -5/9$  è l'effetto sostituzione, cioè la parte di variazione complessiva determinata dall'aumento del prezzo relativo (costo-opportunità) del bene 1 a parità di reddito reale del consumatore ed infine  $\Delta q_1^r = 25/3 - 85/9 = -10/9$  è

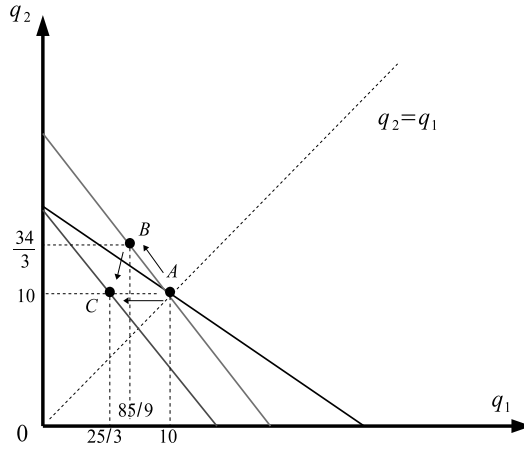


Figura 6: Scomposizione dell'effetto prezzo in effetto reddito e sostituzione

l'effetto reddito, cioè la parte di variazione complessiva determinata dalla riduzione del reddito reale per effetto dell'aumento di prezzo:

$$-\frac{5}{3} = -\frac{5}{9} - \frac{10}{9}$$

La figura 6 illustra la scomposizione dell'effetto prezzo  $\bar{AC}$  in effetto sostituzione,  $\bar{AB}$ , ed effetto reddito,  $\bar{BC}$ . Nell'esempio considerato effetto sostituzione ed effetto prezzo operano nella stessa direzione: l'aumento di prezzo del bene 1 porta ad una riduzione della quantità acquistata perchè il bene 1 in termini relativi (cioè rispetto al bene 2) è più oneroso (effetto sostituzione) e perchè il reddito reale del consumatore diminuisce (effetto reddito).

### 3 Scelte intertemporali

**Esercizio 6.** Tizio di sponde di  $Y_0 = 10.000$  euro per il consumo del periodo corrente e  $Y_1 = 14.560$  euro per il consumo del periodo futuro. Si indichi con  $c_0$  il consumo, in termini reali, del periodo corrente e con  $c_1$  quello del periodo futuro; inoltre siano  $p_0 = 1$  e  $p_1 = 1$  i livelli dei prezzi nei due periodi.

Le preferenze di Tizio sono rappresentate dalla funzione di utilità  $u = c_0^{1/3} \cdot c_1^{2/3}$ ; il corrispondente saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) è  $-\frac{dc_1}{dc_0} = \frac{c_1}{2c_0}$ .

*Si supponga, infine, che sia possibile dare o prendere a prestito al saggio di interesse del 4%.*

- a) Si ricavi il vincolo di bilancio intertemporale e se ne dia l'interpretazione economica.*
- b) Si determini il livello di risparmio (o indebitamento) corrispondente alla scelta razionale di Tizio.*
- c) Per quali livelli di  $Y_1$ , cioè del reddito del periodo futuro, la scelta razionale di Tizio comporta un indebitamento?*

**Soluzione.** a) Il vincolo di bilancio intertemporale è il vincolo di bilancio di Tizio esteso all'intero orizzonte temporale (nel nostro caso due periodi):

$$c_1 = 14.560 + (10.000 - c_0)1,04 \quad (27)$$

in cui  $S = 10.000 - c_0 \geq 0$  è il risparmio ( $S > 0$ ) o l'indebitamento ( $S < 0$ ) del periodo iniziale.

b) Determiniamo anzitutto la scelta razionale di consumo corrente e consumo futuro di Tizio; le condizioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} c_1/2c_0 &= 1,04 \\ c_1 &= 14.560 + (10.000 - c_0)1,04 \end{aligned}$$

Si ricava  $c_0 = 8.000$  e  $c_1 = 14.560 + 2000 \cdot 1,04 = 16.640$ . Il risparmio ottimale è quindi  $S = 10.000 - c_0 = 8.000$ .

c) Lasciamo indeterminato il reddito del periodo futuro; dalla soluzione del sistema di equazioni relativo alla scelta razionale di Tizio:

$$\begin{aligned} c_1/2c_0 &= 1,04 \\ c_1 &= Y_1 + (10.000 - c_0)1,04 \end{aligned}$$

si ricava, in particolare:

$$c_0 = \frac{Y_1 + 10.400}{3,12}$$

Tizio si indebita nel periodo corrente se  $c_0 > 10.000$  e quindi:

$$\frac{Y_1 + 10.400}{3,12} > 10.000$$

cioè  $Y_1 > 20.800$ .

**Esercizio 7.** *Tizio deve decidere il suo livello di consumo su due periodi. Siano, rispettivamente,  $c_0$  il consumo del primo periodo (periodo corrente) e  $c_1$  quello del secondo periodo (periodo futuro); supponiamo, inoltre, che  $p_0 = p_1 = 1$  siano i prezzi monetari dei due periodi. Tizio può contare su*

di un reddito  $Y_0 = 1000$  per il periodo corrente e  $Y_1 = 612$  per il periodo futuro. Le preferenze di Tizio sono rappresentate dalla funzione di utilità  $u = c_0 \cdot c_1$  cui corrisponde il saggio marginale di sostituzione, in valore assoluto,  $-dc_1/dc_0 = c_1/c_0$ . Tizio può prendere o dare a prestito al saggio d'interesse (nominale) del 2%.

- a) Si determini il risparmio di Tizio corrispondente alla scelta razionale.
- b) Supponiamo che il saggio d'interesse che Tizio deve pagare per le somme prese a prestito salga al 3%, fermo restando al 2% il saggio d'interesse che riceve per le somme prestate.
  - i) Si ricavi il nuovo vincolo di bilancio di Tizio e lo si rappresenti geometricamente.
  - ii) Si determini l'effetto dell'aumento del saggio d'interesse sulle somme prese a prestito sulla scelta razionale di Tizio. Si commenti.

**Soluzione.** (a) La scelta razionale di Tizio si ottiene dalla soluzione del sistema di equazioni formato dalla condizione di ottimo (uguaglianza fra saggio di sostituzione fra consumo futuro e consumo presente e prezzo relativo del consumo futuro in termini di consumo presente) e dal vincolo intertemporale di bilancio:

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{c_0} &= 1,02 \\ c_1 &= 612 + (1000 - c_0)1,02\end{aligned}$$

Dalla soluzione del sistema si ricava  $c_0^* = 800$  e quindi  $S = 1000 - c_0^* = 200$  è il corrispondente livello del risparmio.

(b) Se il saggio d'interesse, per le somme prese a prestito, è maggiore di quello che la banca paga per le somme depositate cambia il vincolo di bilancio che ora diventa:

$$c_1 = 612 + (1000 - c_0)1,02$$

per  $c_0 \leq 1000$ , cioè per il caso in cui non si indebita e:

$$c_1 = 612 + (1000 - c_0)1,03$$

per  $c_0 > 1000$ , cioè per il caso di indebitamento. Il nuovo vincolo di bilancio è quindi nonlineare come mostra la figura 7

Poichè nella situazione iniziale Tizio risparmia, si ricava immediatamente che la soluzione razionale non cambia; si consideri al riguardo la figura 8

Supponiamo che la soluzione cambi; la sola possibilità è che Tizio si indebiti. Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{c_0} &= 1,03 \\ c_1 &= 612 + (1000 - c_0)1,03 \\ c_0 &> 10.000\end{aligned}$$

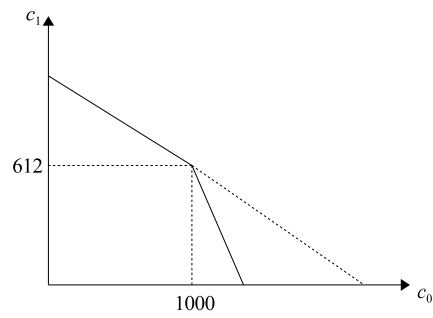


Figura 7: vincolo di bilancio nel caso di un saggio nominale d'interesse per le somme prese a prestito maggiore di quello pagato dalla banca

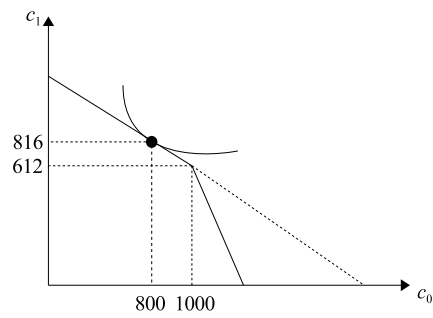


Figura 8: Scelta razionale del consumatore quando il saggio d'interesse sulle somme prese a prestito è superiore a quello pagato dalla banca

Dalle prime due equazioni si ricava che  $c_0 = 1642/2,06 < 1000$ , soluzione che non soddisfa la condizione che Tizio si indebiti.

## 4 Scelte in condizioni di rischio ed incertezza

**Esercizio 8.** *Tizio ha 20.000 euro sul conto corrente bancario, conto che rende il 5% all'anno. La banca propone a Tizio, all'inizio dell'anno, di investire il 30% del conto in azioni della società alfa. Le azioni della società alfa possono rendere l'8% se la situazione economica internazionale risulterà positiva (crescita dell'economia mondiale) oppure perdere il 4% se la situazione economica internazionale sarà negativa (stagnazione dell'economia mondiale).*

*Le preferenze di Tizio sono rappresentate dalla funzione di utilità  $v = W/10$  in cui  $W$  è il valore del patrimonio di Tizio alla fine dell'anno (patrimonio che coincide con il risparmio). Sia, infine,  $\pi$  la probabilità che l'economia mondiale sia in fase positiva.*

- (i) *Si determini il risparmio di Tizio alla fine dell'anno corrispondente alle alternative a disposizione.*
- (ii) *Si determini il costo opportunità dell'investimento in azioni e se ne dia l'interpretazione economica.*
- (iii) *Si determini per quali valori di  $\pi$  Tizio si comporta in modo razionale se mantiene il suo risparmio sul conto corrente bancario.*

**Soluzione.** (i) Tizio può scegliere fra due alternative:

- mantenere i 20.000 euro sul conto corrente bancario (alternativa  $a_1$ );
- conservare 14.000 euro sul conto corrente bancario ed investire i rimanenti 6.000 euro nelle azioni della società *alfa* (alternativa  $a_2$ ).

Indichiamo con  $W_1(a_i)$  il risparmio di Tizio alla fine dell'anno se la situazione economica internazionale è risultata positiva e con  $W_2(a_i)$  il risparmio di Tizio alla fine dell'anno se la situazione economica internazionale è risultata negativa corrispondenti all'alternativa  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Se Tizio decide di lasciare i suoi risparmi in banca (alternativa  $a_1$ ) abbiamo che:

$$W_1(a_1) = W_2(a_1) = 20.000 \cdot 1,05 = 21.000$$

Se Tizio sposta 6.000 euro dal conto corrente bancario alle azioni della società *alfa* abbiamo che:

$$W_1(a_2) = 14.000 \cdot 1,05 + 6.000 \cdot 1,08$$

$$W_2(a_2) = 14.000 \cdot 1,05 + 6.000 \cdot 0,96$$



cioè:

$$W_1(a_2) = 21.180$$

$$W_2(a_2) = 20.460$$

(ii) Spostando 6.000 euro dal conto corrente bancario alle azioni Tizio può guadagnare  $\Delta W_1 = 21.180 - 21.000 = 180$  euro se la situazione economica internazionale, nel corso dell'anno, risulta positiva ma può perdere  $\Delta W_2 = 20.460 - 21.000 = -540$  euro se invece la situazione economica internazionale è negativa; pertanto:

$$\frac{\Delta W_2}{\Delta W_1} = \frac{-540}{180} = -3$$

è il costo opportunità della decisione di Tizio di investire in azioni. Per ogni euro guadagnato quando le cose vanno bene Tizio può perdere 3 euro quando le cose vanno male.

(iii) Per determinare la scelta razionale di Tizio dobbiamo calcolare l'utilità attesa per ciascuna alternativa; l'utilità attesa dell'alternativa  $a_i$ , con  $i = 1, 2$  è definita da:

$$\mathcal{E}v(a_i) = \pi \frac{W_1(a_i)}{10} + (1 - \pi) \frac{W_2(a_i)}{10}$$

Pertanto:

$$\mathcal{E}v(a_1) = \pi 2.100 + (1 - \pi) 2.100 = 2.100$$

mentre:

$$\mathcal{E}v(a_2) = \pi 2.118 + (1 - \pi) 2.046 = 2.046 + 72\pi$$

Tizio deciderà di tenere i suoi soldi in banca se:

$$\mathcal{E}v(a_1) > \mathcal{E}v(a_2)$$

vale a dire se  $2.100 > 2.046 + 72\pi$ , ovvero se  $\pi$  soddisfa la condizione:

$$\pi < \frac{3}{4}$$

**Esercizio 9.** Tizio dispone di 10.000 euro di risparmio che può impiegare in due modi alternativi:

- (i) acquistando azioni che possono guadagnare il 21% con probabilità  $\pi = 3/4$ , oppure perdere il 19%;
- (ii) depositando il risparmio su un conto corrente in banca che rende un saggio di interesse certo.

Le preferenze di Tizio sono rappresentate dalla funzione di utilità  $u = \sqrt{W}$  in cui  $W$  rappresenta il risparmio di Tizio alla fine dell'anno (valore del portafoglio di attività). Tizio decide in base al criterio della massimizzazione dell'utilità attesa.

- (a) Si determini il risparmio di Tizio alla fine dell'anno corrispondente alle alternative a disposizione.
- (b) Si definisca la nozione di utilità attesa e la si calcoli per entrambe le alternative.
- (c) Per quali valori del saggio di interesse sul conto corrente bancario Tizio si comporta in modo razionale impiegando il suo risparmio in banca? Si commenti.

**Soluzione** (a) Indichiamo con  $W_1$  il valore del portafoglio di Tizio alla fine dell'anno se si verifica la situazione favorevole e con  $W_2$  il valore del portafoglio alla fine dell'anno se si verifica la situazione sfavorevole. Se Tizio deposita i suoi risparmi sul conto corrente bancario si ritroverà, alla fine dell'anno, un valore del portafoglio pari a  $W_1 = W_2 = 10.000 \cdot (1 + r)$ , in cui  $r > 0$  è il saggio (nominale) d'interesse pagato dalla banca. Se invece impiega il suo risparmio in azioni si ritroverà, alla fine dell'anno, un portafoglio che vale:

$$W_1 = 10.000 \cdot 1,21 = 12100$$

se si è verificato l'evento favorevole, ovvero un portafoglio del valore di:

$$W_2 = 10.000 \cdot (1 - 0,19) = 10.000 \cdot 0,81 = 8100$$

se si è verificato l'evento sfavorevole. In generale il valore del portafoglio di Tizio alla fine dell'anno è un *bene contingente* dato che dipende dal verificarsi di un evento aleatorio.

(b) L'utilità attesa dell'impiego del risparmio in banca è, ovviamente:

$$\mathcal{E}u(B) = \frac{3}{4} \sqrt{10.000(1+r)} + \frac{1}{4} \sqrt{10.000(1+r)} = 100\sqrt{1+r}$$

mentre per l'impiego del risparmio in azioni è pari a:

$$\mathcal{E}u(E) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{12.100} + \frac{1}{4} \sqrt{8.100} = \frac{420}{4} = 105$$

(c) Tizio impiegherà il suo risparmio in banca se:

$$\mathcal{E}u(B) > \mathcal{E}u(E)$$

vale a dire:

$$100\sqrt{1+r} > 105$$

cioè  $1 + r > 1,1025$  quindi per  $r^* > 0,1025$ , cioè per un saggio d'interesse sufficientemente alto (Si consideri che Tizio è avverso al rischio e quindi è disposto ad accettare anche un saggio d'interesse inferiore al saggio atteso di rendimento delle azioni pari a  $3/4 \cdot 0,21 - 1/4 \cdot 19 = 0,11$ ).